Übersicht über die wichtigsten diskreten Verteilungen

LAMBERT

www.REPETITORIEN.de

Zweipunktverteilung

$$P(X=x)=\begin{cases} p & \text{für } x=x_1 \\ 1-p & \text{für } x=x_2 \end{cases}$$

Zwei Ereignisse

p ... Erfolgswsk. für x_1

$E(X)=px_1+(1-p)x_2 \quad Var(X)=p(1-p)(x_1-x_2)^2$

Spezialfall: **Bernoulli**-Verteilung

$$P(X=x)=\begin{cases} p & \text{für } x=1 \\ 1-p & \text{für } x=0 \end{cases}$$

Null-Eins-Verteilung

$E(X)=p \quad Var(X)=p(1-p)$

n-malige Durchführung eines Bernoulli-Experiments

Binomialverteilung B(n;p)

Zwei Ereignisse p ... Erfolgswsk. für x

n-maliges ZmZ

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \quad \text{für } x=0,1,\dots,n$$

$E(X)=np \quad Var(X)=np(1-p)$

Spezialfall: **Laplace**-Verteilung

p=(1-p)=0,5

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{für } x=0,1,\dots,n$$

„ZoZ“

Hypergeometrische Verteilung H(N;M;n)

n-maliges ZoZ

N ... # Kugeln

M ... # Kugeln mit gewünschter Eigenschaft

$$P(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X)=n\frac{M}{N}$$

$$Var(X)=n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$H(N;M;n)\dot{\sim}B\left(n;\frac{M}{N}\right)$

für $\frac{M}{N}\le 0{,}05$

bzw. großes N und kleines n

„Misserfolge“

Geometrische Verteilung G(p)

„Das Warten auf den ersten Erfolg"

Erster Erfolg im x-ten Versuch bzw. nach (x-1) Misserfolgen

$$P(X=x)=p(1-p)^{x-1}$$

$$E(X)=\frac{1}{p} \quad Var(X)=\frac{1-p}{p^2}$$

Negative Binomialverteilung NB(r;p)

Wir suchen die Wsk., den r-ten Erfolg im n=(k+r)-ten Versuch zu erzielen.

k ... # Misserfolge

n=r+k ... # der Versuche

$$P(X=n)=\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$$

$$E(X)=\frac{r}{p} \quad Var(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

„Mehr als zwei interessierende Ereignisse"

Multinomialverteilung

Wsk., genau n_i-mal das Ereignis X_i zu erzielen (mit $\Sigma n_i=n$).

$$P(X_1=n_1;\cdots;X_k=n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}$$

$$E(X)=(np_1,\cdots,np_k)$$

$$Cov(X_i,X_j)=\begin{cases} np_i(1-p_i) & \text{für } i=j \\ -np_ip_j & \text{für } i\neq j \end{cases}$$

$B(n;p)\dot{\sim}N(np;np(1-p))$

für $np(1-p)\ge 10$

$B(n;p)\dot{\sim}P(np)$

für $n\ge 50$ und $p\le\frac{1}{10}$

bzw. großes n und kleines p

Stetige ZV:

Normalverteilung N(μ;σ²)

$E(X)=\mu \quad Var(X)=\sigma^2$

Standardnormalverteilung N(0;1)

$$X\sim N(\mu;\sigma^2)\Rightarrow Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0;1)$$

$P(X\le a)=\Phi(a) \quad \Phi(-a)=1-\Phi(a)$

$\Phi(a)\rightarrow$ vgl. Tabelle der $N(0;1)$

Stetigkeitskorrektur:

$$P(a\le X\le b)=\Phi\left(\frac{b-\mu+0{,}5}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu-0{,}5}{\sigma}\right)$$

Poissonverteilung P(λ)

Seltene Ereignisse

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

$$E(X)=Var(X)=\lambda=np$$

$P(\lambda)\dot{\sim}N(\lambda;\lambda)$

für $\lambda\ge 10$