Übungsaufgabe 4

Wir betrachten eine reine Tauschwirtschaft, in welcher die beiden Akteure Meyer und Schulze über die beiden Gütermengen X und Y verfügen. Die Anfangsausstattung von Meyer beträgt

$\bar{X}_M = 4$, $\bar{Y}_M = 4$,

die von Schulze beträgt

$\bar{X}_S = 0$, $\bar{Y}_S = 12$.

Die Präferenzen von Meyer werden durch die Nutzenfunktion

(1) $U_M = (X_M Y_M)^{1/2}$, die von Schulze durch

(2) $U_S = (X_S Y_S)^2$ beschrieben.

a) Über welche Mengen der beiden Güter verfügen die beiden Akteure im Pareto-Optimum, falls Schulze einen Nutzen von $\bar{U}_S = 16$ erreichen soll?

b) Wie würde sich das Ergebnis ändern, falls die Anfangsausstattung $\bar{X}_M = 4$, $\bar{Y}_M = 10$ und $\bar{X}_S = 0$, $\bar{Y}_S = 6$ betrüge?

Die Lösung entspricht jener im Kurs und wurde um einige Zwischenschritte erweitert.

Lösung zu Übungsaufgabe 4

a) Im Gleichgewicht muss der Nutzen von Meyer maximal sein, vorausgesetzt Schulze erreicht einen Nutzen von $\bar{U}_S = 16$. Der Lagrange-Ansatz zur Lösung dieses Maximierungsproblems lautet:

aus (3.2-5) analog: $\Lambda = U_M(X_M, Y_M) + \lambda\left[\bar{U}_S - U_S(\bar{X} - X_M, \bar{Y} - Y_M)\right]$

mit (7) und (8): $\bar{X} = X_M + X_S = 4$, $\bar{Y} = Y_M + Y_S = 16$ folgt:

(3) $\Lambda = (X_M Y_M)^{1/2} + \lambda\left[16 - ((4 - X_M)(16 - Y_M))^2\right]$.

Daraus ergeben sich die Bedingungen 1. Ordnung zu

(4) $$\frac{\partial\Lambda}{\partial X_M} = \frac{1}{2} X_M^{-1/2} Y_M^{1/2} + 2\lambda(4 - X_M)(16 - Y_M)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{U_M}{X_M} = -2\lambda\frac{U_S}{X_S},$$

(5) $$\frac{\partial\Lambda}{\partial Y_M} = \frac{1}{2} X_M^{1/2} Y_M^{-1/2} + 2\lambda(4 - X_M)^2(16 - Y_M) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{U_M}{Y_M} = -2\lambda\frac{U_S}{Y_S}.$$

(4) ausführlich / (5) analog:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial X_M} = \frac{1}{2} X_M^{-1/2} Y_M^{1/2} + 2\lambda(4 - X_M)(16 - Y_M)^2 = 0$$

Erweiterung mit $\frac{X_M^{1/2}}{X_M^{1/2}} = 1$ und $\frac{(4 - X_M)}{(4 - X_M)} = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{X_M^{1/2} Y_M^{1/2}}{X_M^{1/2} X_M^{1/2}} + 2\lambda \frac{(4 - X_M)^2 (16 - Y_M)^2}{(4 - X_M)} = 0$$

mit $X_M^{1/2} Y_M^{1/2} = U_M$, $(4 - X_M)^2 (16 - Y_M)^2 = U_S$ und $(4 - X_M) = X_S$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{U_M}{X_M} + 2\lambda \frac{U_S}{X_S} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{U_M}{X_M} = -2\lambda \frac{U_S}{X_S}$$

Dividiert man (4) durch (5), (ausführlich: auflösen nach λ und gleichsetzen) ergibt sich

(6) $\quad \frac{Y_M}{X_M} = \frac{Y_S}{X_S}$ und damit $Y_M = \frac{Y_S}{X_S} X_M$.

auf (6) kommen Sie über die linke *oder* rechte Seite von (4) und (5). Auch ohne die Umformung der linken Seiten von (4) und (5) sollten Sie auf (6) kommen:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{2} X_M^{-1/2} Y_M^{1/2}}{\frac{1}{2} X_M^{1/2} Y_M^{-1/2}} = \frac{2\lambda(4 - X_M)(16 - Y_M)^2}{2\lambda(4 - X_M)^2 (16 - Y_M)}$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{Y_M}{X_M} = \frac{(16 - Y_M)}{(4 - X_M)}$ mit $(16 - Y_M) = Y_S$ und $(4 - X_M) = X_S$ folgt (6)

Weiterhin gilt

(7) $\quad \bar{X} = X_M + X_S = 4$ und

(8) $\quad \bar{Y} = Y_M + Y_S = 16$.

Setzt man (6) in (8) ein, ergibt sich

(9) $\quad \frac{Y_S}{X_S} X_M + Y_S = 16 \Rightarrow Y_S \left(\frac{X_M}{X_S} + 1 \right) = 16 \Leftrightarrow Y_S \left(\frac{X_M + X_S}{X_S} \right) = 16$

mit $\bar{X} = X_M + X_S = 4$

$$\Rightarrow Y_S = \frac{16}{\bar{X}} X_S = 4 X_S \Rightarrow X_S = \frac{1}{4} Y_S.$$

Setzt man (9) in (2) ein, ergibt sich

(10) $\bar{U}_S = 16 = (\frac{1}{4} Y_S Y_S)^2 \Rightarrow 16 = \frac{1}{16} Y_S^4 \Rightarrow Y_S^* = 4$.

Damit erhält man

$X_S^* = 1$, $X_M^* = 3$

$Y_M^* = 12$, $U_M^* = 6$ und

$U_S^* = 16$.

In der Ausgangssituation betrugen die Nutzen $\bar{U}_M = 4$ und $\bar{U}_S = 0$. Beide Akteure stehen sich im Gleichgewicht besser.

b) Falls die Ausgangsallokation

$(X_M, Y_M) = (4;10)$ und

$(X_S, Y_S) = (0;6)$

betrüge, wäre – wie in a) –

$\bar{X} = 4$ und $\bar{Y} = 16$.

Gegeben $\bar{U}_S = 16$, lautet die zugehörige Pareto-optimale Allokation also wieder

$(X_M, Y_M) = (3;12)$ und

$(X_S, Y_S) = (1;4)$.

Intuitiv: Wir bewegen uns auf der selben Nutzenfunktion $\bar{U}_S = 16$ wie in a). Da auch die Nutzenfunktion U_M sich nicht geändert hat muss die selbe Allokation wie in a) erreicht werden.

Ausgehend von der Ausgangsallokation würde diese Allokation jedoch nicht erreicht. Wegen $(4 \cdot 10)^{1/2} > (3 \cdot 12)^{1/2}$ würde Meyer sie blockieren, da sie ihn schlechter stellen würde als die Ausgangssituation.