Autor: Maik Hetmank

Ausführliche formal-analytische Herleitungen anhand von zwei Beispielen zum Kapitel 3.2 zum

Kurs 42110 „Preisbildung auf unvollkommenen Märkten und allgemeines Gleichgewicht“

Inhaltsverzeichnis

1 Zielfunktionen und Restriktionen

Beispielfunktionen:

	Beispiel 1		**Beispiel 2**	
	Anna	Berta	Cäsar	Dirk
Zielfunktion	$U_A = X_A Y_A$	$U_B = X_B Y_B^2$	$U_C = X_C Y_C$	$U_D = X_D Y_D$
Anfangsausstattung	$\bar{X}_A = 10$ $\bar{Y}_A = 20$	$\bar{X}_B = 10$ $\bar{Y}_B = 10$	$\bar{X}_C = 10$ $\bar{Y}_C = 20$	$\bar{X}_D = 10$ $\bar{Y}_D = 10$

Zunächst seien die Zielfunktionen und die Restriktionen genannt, die für alle weiteren Herleitungen gelten.

1.1 Beispiel 1

Zielfunktionen:

$$U_A = X_A Y_A \rightarrow \max! \tag{1.1}$$

$$U_B = X_B Y_B^2 \rightarrow \max! \tag{1.2}$$

Erstausstattungsrestriktionen:

$$X_A + X_B = \bar{X} = 20 \tag{1.3}$$

$$Y_A + Y_B = \bar{Y} = 30 \tag{1.4}$$

1.2 Beispiel 2

Zielfunktionen:

$$U_C = X_C Y_C \rightarrow \max! \tag{1.5}$$

$$U_D = X_D Y_D \rightarrow \max! \tag{1.6}$$

Erstausstattungsrestriktionen:

$$X_C + X_D = \bar{X} = 20 \tag{1.7}$$

$$Y_C + Y_D = \bar{Y} = 30 \tag{1.8}$$

Autor: Maik Hetmank

2 Das Pareto Optimum

Zur Ermittlung des Pareto-Optimums (bzw. genauer der Pareto-Optima) führen wir für gegebene Nutzenniveaus des Tauschpartners eine individuelle Nutzenmaximierung durch. Bei beliebiger Variation des Nutzenniveaus des Tauschpartners lassen sich so alle Pareto-Optima finden. (Vgl. auch Kap. 3.2.1.2, S. 17.)

2.1 Beispiel 1

Zielfunktion:

$$U_A = X_A Y_A \rightarrow \max! \tag{1.1}$$

Nebenbedingung:

$$\bar{U}_B = X_B Y_B^2 = (\bar{X} - X_A)(\bar{Y} - Y_A)^2 = \text{konst.} \tag{2.1}$$

Optimierungsbedingung: Maximiere die Zielfunktion (1.1) u.d.NB. (2.1)

$$L_1 = X_A Y_A + \lambda_1 \left[\bar{U}_B - (\bar{X} - X_A)(\bar{Y} - Y_A)^2 \right] \tag{2.2}$$

Bedingungen 1. Ordnung:

$$\frac{\partial L_1}{\partial X_A} = Y_A + \lambda_1 (\bar{Y} - Y_A)^2 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial Y_A} = X_A + 2\lambda_1 (\bar{X} - X_A)(\bar{Y} - Y_A) \tag{2.4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y_A}{X_A} = \frac{\bar{Y} - Y_A}{2(\bar{X} - X_A)} = \frac{30 - Y_A}{40 - 2X_A} \tag{2.5}$$

Mit (1.3) und (1.4) folgt

$$\Leftrightarrow \quad \frac{Y_A}{X_A} = \frac{Y_B}{2X_B} \quad \Leftrightarrow \quad GRS_A = GRS_B \tag{2.6}$$

Im Allgemeinen kann man nun nicht mehr weiterrechnen, wir erhalten mehrere (unendlich viele) Gleichgewichte, aber kein eindeutiges. Es sei denn, man möchte die Pareto-optimale Allokation für das gewählte (bzw. beliebige) $\bar{U}_B = \text{konst.}$ ermitteln, dann kann man analog zur Übungsaufgabe 4 (ab Gleichung (9)) weiterrechnen. Ein allgemeingültiges Gleichgewicht erhält man jedoch nicht. Im Falle von identischen Präferenzen (vgl. Bsp. 2) ergibt sich jedoch ein Sonderfall:

2.2 Beispiel 2

Zielfunktion:

$$U_B = X_C Y_C \rightarrow \text{ max !} \tag{1.5}$$

Nebenbedingung:

$$\bar{U}_D = X_D Y_D = (\bar{X} - X_C)(\bar{Y} - Y_C) = \text{konst.} \tag{2.7}$$

Optimierungsbedingung:

$$L_2 = X_C Y_C + \lambda_2 \left[\bar{U}_D - (\bar{X} - X_C)(\bar{Y} - Y_C) \right] \tag{2.8}$$

Bedingungen 1. Ordnung:

$$\frac{\partial L_2}{\partial X_C} = Y_C + \lambda_2 (\bar{Y} - Y_C) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial Y_C} = X_C + \lambda_1 (\bar{X} - X_C) \tag{2.10}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_C}{X_C} = \frac{\bar{Y} - Y_C}{\bar{X} - X_C} = \frac{30 - Y_C}{20 - X_C} \tag{2.11}$$

Mit (1.7) und (1.8) folgt

$$\Leftrightarrow \frac{Y_C}{X_C} = \frac{Y_D}{X_D} \Leftrightarrow GRS_C = GRS_D \tag{2.12}$$

Die Bedingung (2.11) lässt sich jedoch auch umformen zu

$$\Leftrightarrow Y_C = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} X_c = \frac{3}{2} X_C \Leftrightarrow \frac{Y_C}{X_C} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = \frac{3}{2} \tag{2.13}$$

Das Verhältnis der Anfangsausstattungen ergibt bei identischen Präferenzen[1] also das Austauschverhältnis und damit das gleichgewichtige Preisverhältnis.

1 Beachte: Auch folgendes Paar von Nutzenfunktionen impliziert identische Präferenzen: $U_E = X_E Y_E$ und $U_F = X_F^2 Y_F^2$. Die Nutzenfunktion von E (bzw. von F) ist lediglich eine positive streng monotone Transformation $(V_E = U_E^2$ bzw. $V_F = \sqrt{U_F})$ und beschreibt somit die gleiche Präferenzordnung (vgl. hierzu bspw. Kurs „Theorie der Marktwirtschaft", KE 2, Kap. 2.2.3.2, S. 37).

Autor: Maik Hetmank

3 Die Kontraktkurve

Die Kontraktkurve ist der Ort aller Pareto-Optima, d.h. hier müssen sich die Grenzraten der Substitution entsprechen. Zur Herleitung der Kontraktkurve führen wir für gegebene Nutzenniveaus des Tauschpartners eine individuelle Nutzenmaximierung durch. Dies haben wir bereits in Abschnitt 2 getan. Wir können also aus den in Abschnitt 2 berechneten Ergebnissen (2.5) bzw. (2.11) die Kontraktkurve herleiten:

3.1 Beispiel 1

Aus (2.5) folgt

$$\frac{Y_A}{X_A}=\frac{30-Y_A}{40-2X_A} \Leftrightarrow 40Y_A-2X_A Y_A=30X_A-X_A Y_A \Leftrightarrow Y_A(40-X_A)=30X_A$$

$$\Leftrightarrow K(X_A)=Y_A=\frac{30X_A}{40-X_A} \rightarrow \text{Kontraktkurve } K(X_A) \tag{3.1}$$

Mit (1.3) und (1.4) folgt nach kleinen Umstellungen die Kontraktkurve aus Sicht von Berta:

$$Y_A=\frac{30X_A}{40-X_A} \Leftrightarrow 30-Y_B=\frac{30(20-X_B)}{40-20+X_B} \Leftrightarrow =Y_B=30-\frac{600-30X_B}{20+X_B}$$

$$\Leftrightarrow K(X_B)=Y_B=\frac{60X_B}{20+X_B} \rightarrow \text{Kontraktkurve } K(X_B) \tag{3.2}$$

3.2 Beispiel 2

Aus (2.11) bzw. (2.13) folgt bei identischen Präferenzen direkt die Kontraktkurve:[2]

$$Y_C=\frac{3}{2}X_C \rightarrow \text{Kontraktkurve } K(X_C) \tag{3.3}$$

Mit (1.7) und (1.8) folgt wiederum die Kontraktkurve aus Sicht von Dirk:[3]

$$Y_C=\frac{3}{2}X_C \Leftrightarrow 30-Y_D=\frac{3}{2}(20-X_D)$$

$$\Leftrightarrow K(X_D)=Y_D=\frac{3}{2}X_D \rightarrow \text{Kontraktkurve } K(X_D) \tag{3.4}$$

2 Beachten Sie: (2.13) und (3.3) sind in der Interpretation nicht identisch. (3.3) ist eine Gerade durch den Ursprung mit positiver Steigung. Die Bedingung (2.13) sagt hingegen etwas über die Grenzrate der Substitution und das optimale Preisverhältnis aus. Beide sind jedoch per Definition negativ. (2.13) müsste demnach ausführlich lauten: $-\frac{Y_C}{X_C}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{Y_C}{X_C}=\frac{3}{2}$.

3 Wenig überraschend gleichen sich die Kontraktkurven von Cäsar und Dirk (die Funktionen sind identisch), da die Kontraktkurve bei identischen Präferenzen eine Gerade ist, welche die beiden Koordinatenursprünge 0_C und 0_D verbindet. Allerdings sind auch die Kontraktkurven von Anna und Berta identisch. Da diese jedoch keine Geraden sind, sondern Anna eine konvexe und dementsprechend Berta eine konkave Kontraktkurve besitzen (jeweils aus ihrer Sicht betrachtet), sind die Funktionen nicht identisch. Erst in der Edgeworth-Box zeigt sich dann, dass beide Kontraktkurven identisch, d.h. deckungsgleich sind.

Autor: Maik Hetmank

4 Die Tauschkurve

Für die Ermittlung der Tauschkurve müssen wir eine individuelle Nutzenmaximierung für gegebene Preisverhältnisse/ Budgetrestriktionen durchführen. Die Restriktion der Erstausstattung (1.3) und (1.4) bzw. (1.7) und (1.8) ist hierbei irrelevant. (vgl. auch Kap. 3.2.3.1, S. 21 ff.)

4.1 Beispiel 1

Zielfunktion:

$$U_B = X_B Y_B^2 \rightarrow \max! \tag{1.2}$$

Budgetrestriktion (Wert der Anfangsausstattung = Wert der Gleichgewichtsallokation):

$$10 P_X + 10 P_Y = P_X X_B + P_Y Y_B \Leftrightarrow P_X(10 - X_B) = P_Y(Y_B - 10) \tag{4.1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_X}{P_Y} = \frac{Y_B - 10}{10 - X_B} \tag{4.1'}$$

Optimierungsbedingung:

$$L_1 = X_B Y_B^2 + \lambda_1 \left[P_X (10 - X_B) + P_Y (10 - Y_B) \right] \tag{4.2}$$

Bedingungen 1. Ordnung:

$$\frac{\partial L_1}{\partial X_A} = Y_B^2 - \lambda_1 P_X \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial Y_B} = 2 X_B Y_B - \lambda_1 P_Y \tag{4.4}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_B}{2 X_B} = \frac{P_X}{P_Y} \Leftrightarrow GRS_B = \frac{P_X}{P_Y} \tag{4.5}$$

Aus (4.5)=(4.1)' folgt

$$\frac{Y_B}{2 X_B} = \frac{P_X}{P_Y} = \frac{Y_B - 10}{10 - X_B} \tag{4.6}$$

$$\Leftrightarrow 10 Y_B - X_B Y_B = 2 X_B Y_B - 20 X_B \Leftrightarrow Y_B (10 - 3 X_B) = -20 X_B$$

$$\Leftrightarrow T_B(X_B) = Y_B = \frac{20 X_B}{3 X_B - 10} \rightarrow \text{Tauschkurve } T_B(X_B) \tag{4.7}$$

Tauschkurve $T_A(X_A) = Y_A = \dfrac{10 X_A}{X_A - 15}$ analog (s.a. Kap. 4.2).

Autor: Maik Hetmank

4.2 Beispiel 2

Zielfunktion:

$$U_C = X_C Y_C \rightarrow \max! \tag{1.5}$$

Budgetrestriktion:

$$10 P_X + 20 P_Y = P_X X_C + P_Y Y_C \Leftrightarrow P_X(10 - X_C) = P_Y(Y_C - 20) \tag{4.8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_X}{P_Y} = \frac{Y_C - 20}{10 - X_C} \tag{4.8'}$$

Optimierungsbedingung:

$$L_2 = X_C Y_C + \lambda_2 \left[P_X(10 - X_C) + P_Y(20 - Y_C) \right] \tag{4.9}$$

Bedingungen 1. Ordnung:

$$\frac{\partial L_2}{\partial X_C} = Y_C - \lambda_2 P_X \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial Y_C} = X_C - \lambda_2 P_Y \tag{4.11}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_C}{X_C} = \frac{P_X}{P_Y} \Leftrightarrow GRS_C = \frac{P_X}{P_Y} \tag{4.12}$$

Aus (4.12)=(4.8)' folgt

$$\frac{Y_C}{X_C} = \frac{P_X}{P_Y} = \frac{Y_C - 20}{10 - X_C} \tag{4.13}$$

$$\Leftrightarrow 10Y_C - X_C Y_C = X_C Y_C - 20 X_C \Leftrightarrow Y_C(15 - X_C) = -10X_C$$

$$\Leftrightarrow T_C(X_C) = Y_C = \frac{10X_C}{X_C - 15} \rightarrow \text{Tauschkurve } T_C(X_C) \tag{4.14}$$

Tauschkurve $T_D(X_D) = Y_D = \dfrac{5X_D}{X_D - 5}$ analog.

Autor: Maik Hetmank

5 Das Konkurrenzgleichgewicht/ Tauschgleichgewicht

5.1 Schnittpunkt von Kontraktkurve und Tauschkurve

Wie in Kapitel 3.2.3.2, S. 25 f. erläutert und bspw. in Abbildung A 3.2-8, S. 26 dargestellt, lässt sich das Tauschgleichgewicht anhand des Schnittpunkts der Tauschkurve mit der Kontraktkurve berechnen. Für Beispiel 1 sei dies nachfolgend erläutert:

Kontraktkurve $K(X_B)$ aus Sicht von Berta:

$$\Leftrightarrow \quad K(X_B) = Y_B = \frac{60X_B}{20+X_B} \tag{3.2}$$

Bertas Tauschkurve $T_B(X_B)$:

$$\Leftrightarrow \quad T_B(X_B) = Y_B = \frac{20\,X_B}{3X_B - 10} \tag{4.7}$$

(3.2)=(4.7)

$$\frac{60X_B}{20+X_B} = \frac{20\,X_B}{3X_B - 10} \quad \Leftrightarrow \quad 9X_B - 30 = 20 + X_B \quad \Leftrightarrow \quad X_B = \frac{25}{4} \tag{5.1}$$

Aus (3.2) oder (4.7) folgt

$$Y_B = \frac{100}{7} \tag{5.2}$$

Mit (1.3) und (1.4) folgt

$$X_B = \frac{25}{4} \text{ und } Y_B = \frac{100}{7} \tag{5.3}$$

Aus (4.5) oder (5.15, s.u.) folgt

$$\frac{Y_B}{2X_B} = \frac{8}{7} = \frac{P_X}{P_Y} \tag{5.4}$$

Autor: Maik Hetmank

5.2 Die Gleichgewichtsbedingung

Anstatt über den Schnittpunkt aus Kontrakt- und Tauschkurve kann man das Tauschgleichgewicht auch über die Angleichung der Grenzraten der Substitution ermitteln. Für die Herleitung des Konkurrenzgleichgewichts müssen beide (alle) Nutzen der Akteure, bei gegebenen Budgets=Wert der Anfangsausstattungen, gleichzeitig maximiert werden. Wie wir anhand der Gleichgewichtsbedingungen (5.15) bzw. (5.21) sehen werden, gelingt dies nur, falls wir ein Preisverhältnis finden, welches allen Grenzraten der Substitution im Optimum entspricht.

Die Herleitung der Gleichgewichtsbedingung wird mittels Lagrangeansatz anhand von Beispiel 1 kurz erläutert:

Zielfunktionen:

$$U_A = X_A Y_A \rightarrow \max! \tag{1.1}$$

$$U_B = X_B Y_B \rightarrow \max! \tag{1.2}$$

Budgetrestriktionen (Wert der Anfangsausstattung = Wert der Gleichgewichtsallokation):

$$10 P_X + 20 P_Y = P_X X_A + P_Y Y_A \Leftrightarrow P_X(10 - X_A) = P_Y(Y_A - 20) \tag{5.5}$$

$$10 P_X + 10 P_Y = P_X X_B + P_Y Y_B \Leftrightarrow P_X(10 - X_B) = P_Y(Y_B - 10) \tag{5.6}$$

Optimierungsbedingungen:

$$L_1 = X_A Y_A + \lambda_1 [P_X(10 - X_A) + P_Y(20 - Y_A)] \tag{5.7}$$

$$L_2 = X_B Y_B^2 + \lambda_2 [P_X(10 - X_B) + P_Y(10 - Y_B)] \tag{5.8}$$

Bedingungen 1. Ordnung:

$$\frac{\partial L_1}{\partial X_A} = Y_A - \lambda_1 P_X \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial Y_A} = X_A - \lambda_1 P_Y \tag{5.10}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_A}{X_A} = \frac{P_X}{P_Y} \tag{5.11}$$

sowie

$$\frac{\partial L_2}{\partial X_B} = Y_B^2 - \lambda_2 P_X \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial Y_B} = 2 X_B Y_B - \lambda_2 P_Y \tag{5.13}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_B}{2 X_B} = \frac{P_X}{P_Y} \tag{5.14}$$

(5.11) und (5.14) ergeben dann die Gleichgewichtsbedingung.

$$GRS_A = GRS_B = \frac{P_X}{P_Y} \Leftrightarrow \frac{Y_A}{X_A} = \frac{Y_B}{2 X_B} = \frac{P_X}{P_Y} \tag{5.15}$$

Analog für Beispiel 2: (5.21)

Mit dieser Bedingung können wir nun weiterrechnen:

Autor: Maik Hetmank

5.3 Beispiel 1

Gleichgewichtsbedingung:

$$GRS_A = GRS_B = \frac{P_X}{P_Y} \Leftrightarrow \frac{Y_A}{X_A} = \frac{Y_B}{2X_B} = \frac{P_X}{P_Y} \tag{5.15}$$

Budgetrestriktionen (Wert der Anfangsausstattung = Wert der Gleichgewichtsallokation):

$$P_X \bar{X}_A + P_Y \bar{Y}_A = P_X X_A + P_Y Y_A \Leftrightarrow 10\,P_X + 20\,P_Y = P_X X_A + P_Y Y_A \tag{5.16}$$

$$P_X \bar{X}_B + P_Y \bar{Y}_B = P_X X_B + P_Y Y_B \Leftrightarrow 10\,P_X + 10\,P_Y = P_X X_B + P_Y Y_B \tag{5.17}$$

Zur Erinnerung: Gesucht sind $X_A, X_B, Y_A, Y_B, P = \frac{P_X}{P_Y}$ bei nur fünf Gleichungen (Restriktionen (1.3) und (1.4) nicht vergessen), das System ist also unterbestimmt, d.h. nicht eindeutig lösbar. (1.3) und (1.4) kann man nun in (5.15) und (5.17) [oder (5.15) und (5.16)] einsetzen:[4]

$$\frac{Y_A}{X_A} = \frac{\bar{Y} - Y_A}{2(\bar{X} - X_A)} = \frac{P_X}{P_Y} \Leftrightarrow \frac{Y_A}{X_A} = \frac{30 - Y_A}{2(20 - X_A)} = \frac{P_X}{P_Y} \tag{5.15'}$$

$$P_X(10 - X_A) = P_Y(Y_A - 20) \Leftrightarrow \frac{P_X}{P_Y} = \frac{Y_A - 20}{10 - X_A} \tag{5.16'}$$

$$P_X(10 - 20 + X_A) = P_Y(30 - Y_A - 10) \Leftrightarrow \frac{P_X}{P_Y} = \frac{Y_A - 20}{10 - X_A} \tag{5.17'}$$

Da (5.16)' und (5.17)' äquivalent sind (die Budgetgeraden=gleichgewichtige Preisgeraden der beiden Akteure sollten ja auch identisch sein), ist das Gleichungssystem nun sogar zweifach unterbestimmt. Wir bräuchten spätestens jetzt also eine weitere Angabe. Normalerweise müsste man nun einen Wert für $P = \frac{P_X}{P_Y}$ raten oder man bekommt ein (hoffentlich gleichgewichtiges) Preisverhältnis gestellt. Damit ließe sich dann (5.15)' vereinfachen:

Von irgendwoher (s. (5.4)) wissen wir nun, dass das gleichgewichtige Preisverhältnis

$$\frac{P_X}{P_Y} = P = \frac{8}{7} \text{ ist.} \tag{5.18}$$

Eingesetzt in (5.15)' und (5.16)' erhält man

$$\frac{Y_A}{X_A} = \frac{8}{7} \Leftrightarrow Y_A = \frac{8}{7} X_A \text{ sowie} \tag{5.15''}$$

$$\frac{8}{7} = \frac{\frac{8}{7} X_A - 20}{10 - X_A} \Leftrightarrow \frac{80}{7} - \frac{8}{7} X_A = \frac{8}{7} X_A - 20 \Leftrightarrow \frac{220}{7} = \frac{16}{7} X_A \tag{5.16''}$$

$$\Leftrightarrow X_A = \frac{55}{4} \text{ und wegen (5.15)'' } Y_A = \frac{110}{7} \tag{5.19}$$

Mit (1.3) und (1.4) folgt

$$X_B = \frac{25}{4} \text{ und } Y_B = \frac{100}{7} \tag{5.20}$$

Test mit (5.15) bestätigt: $\frac{Y_A}{X_A} = \frac{Y_B}{2X_B} = \frac{P_X}{P_Y} = \frac{8}{7}$.[5]

---

4 Wir versuchen durch die Substitution von X_B und Y_B durch X_A und Y_A die Anzahl der unbekannten Variablen zu reduzieren, um damit ein eindeutig lösbares Gleichgewicht zu erhalten.

5 Würde (5.15) nicht erfüllt sein, so hätten wir entweder P falsch geraten oder das an-/ vorgegebene Preisverhältnis ist kein gleichgewichtiges gewesen.

Autor: Maik Hetmank

5.4 Beispiel 2

Gleichgewichtsbedingung:

$$GRS_C = GRS_D = \frac{P_X}{P_Y} \Leftrightarrow \frac{Y_C}{X_C} = \frac{Y_D}{X_D} = \frac{P_X}{P_Y} \tag{5.21}$$

Budgetrestriktionen:

$$P_X \bar{X}_C + P_Y \bar{Y}_C = P_X X_C + P_Y Y_C \Leftrightarrow 10\,P_X + 20\,P_Y = P_X X_C + P_Y Y_C \tag{5.22}$$

$$P_X \bar{X}_D + P_Y \bar{Y}_D = P_X X_D + P_Y Y_D \Leftrightarrow 10\,P_X + 10\,P_Y = P_X X_D + P_Y Y_D \tag{5.23}$$

Gesucht: $X_C, X_D, Y_C, Y_D, P = \frac{P_X}{P_Y}$, bei nur fünf Gleichungen: das System ist unterbestimmt.

(1.7) und (1.8) in (5.21) und (5.23) [oder (5.21) und (5.22)] einsetzen:

$$\frac{Y_C}{X_C} = \frac{\bar{Y} - Y_C}{\bar{X} - X_C} = \frac{P_X}{P_Y} \Leftrightarrow \frac{Y_C}{X_C} = \frac{30 - Y_C}{20 - X_C} = \frac{P_X}{P_Y} \tag{5.21'}$$

$$P_X(10 - X_C) = P_Y(Y_C - 20) \Leftrightarrow \frac{P_X}{P_Y} = \frac{Y_C - 20}{10 - X_C} \tag{5.22'}$$

$$P_X(10 - 20 + X_C) = P_Y(30 - Y_C - 10) \Leftrightarrow \frac{P_X}{P_Y} = \frac{Y_C - 20}{10 - X_C} \tag{5.23'}$$

Wiederum sind (5.22)' und (5.23)' äquivalent; das Gleichungssystem ist zweifach unterbestimmt. Aufgrund der identischen Präferenzen wissen wir jedoch wegen (2.13) aus Abschnitt 2.2, dass das gleichgewichtige Preisverhältnis

$$\frac{P_X}{P_Y} = P = \frac{3}{2} \text{ sein muss.} \tag{5.24}$$

Eingesetzt in (5.21)' und (5.22)' erhält man

$$\frac{Y_C}{X_C} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow Y_C = \frac{3}{2} X_C \text{ sowie} \tag{2.13}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{\frac{3}{2} X_C - 20}{10 - X_C} \Leftrightarrow 15 - \frac{3}{2} X_C = \frac{3}{2} X_C - 20 \Leftrightarrow 35 = 3\,X_C \tag{5.22''}$$

$$\Rightarrow X_C = \frac{35}{3} \text{ und wegen (2.13) } Y_C = \frac{35}{2} \tag{5.25}$$

Mit (1.7) und (1.8) folgt

$$X_D = \frac{25}{3} \text{ und } Y_D = \frac{25}{2} \tag{5.26}$$

Test mit (5.21) bestätigt: $\frac{Y_C}{X_C} = \frac{Y_D}{X_D} = \frac{P_X}{P_Y} = \frac{3}{2}$.